Espaces préhilbertiens

→ C.S : $|\langle x,y\rangle| \leqslant \sqrt{\|x\|}\sqrt{\|y\|}$

→ Médiane $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$
Polarisation $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

→ $j \left| \begin{array}{l} E \to E^* \\ u \mapsto \langle u, \cdot\rangle \end{array}\right.$ isomorphisme

→ H hyperplan $\Rightarrow \exists u \in E \quad H^\perp = \mathbb{R}u$.

→ Existence d'une base orthonormée, à justifier au besoin...

→ Schmidt $(e_1,\dots,e_n)$ base $\to (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ BON unique [5]
$\langle \varepsilon_i, e_i\rangle > 0$. expression matricielle $[e_i]_{(\varepsilon_i)} = \begin{pmatrix} a_{11} & * \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

→ Peu importe la dim, $F^\perp$ est fermé. $(x \mapsto \langle a,y\rangle)$

→ $p \in \mathcal{L}(E)$ proj orthogonal $\Leftrightarrow p\circ p = p$ et $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} p^\perp$

↳ p P.O $\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \operatorname{Ker} p, \operatorname{Im} p \text{ fermés} \\ \text{si } p \neq 0, |||p||| = 1. \end{array}\right.$

→ PP.O sur F, $\forall x \in E \; d(x,F) = \|x - p(x)\|_2$.

Stuce $\longrightarrow$ $p \in \mathcal{L}(E)$ tq $p^2 = p$:

$\Updownarrow$ p est un P.O

p est $\mathcal{C}^0$ et $|||p||| \leq 1$

$\hookrightarrow$ Exemple : $p, q \in \mathcal{L}(E)$ P.O Mq $p \circ q$ PO

$\Leftarrow p \circ q = q \circ p$

$\hookrightarrow \Leftarrow |||p \circ q||| \leq |||p||| \, |||q||| \leq 1 \to p \circ q$ ortho